MINISTERE DE L'URBANISME
DU LOGEMENT ET DES TRANSPORTS

E.I.T.P.E. 1986

4

EPREUVE PRATIQUE DE MATHEMATIQUES

(temps accordé : 2 heures)

I

Soit f une fonction à valeurs réelles positives, définie et de classe C^1 sur le segment [a,b] des réels, et dont la dérivée f' est monotone. On pourra, dans les explications, se contenter de la supposer croissante, le cas décroissant étant intuitivement analogue.

On rappelle que, f' étant croissante, la fonction est dite convexe, ce qui entraîne :

a) que les points de tout arc MN de la courbe représentative de f sont, par rapport à la direction Oy, au dessous de (ou sur) la corde MN.

b) que tous les points de la courbe sont, par rapport à la direction Oy, au dessus de (ou sur) la tangente en un point quelconque M.

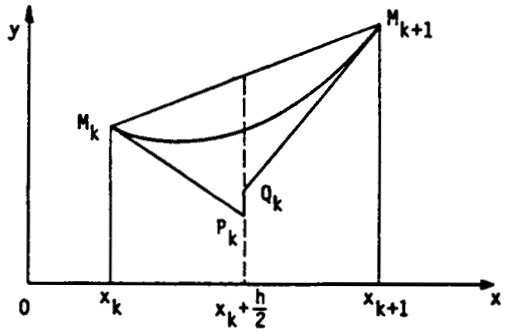
Si f' est décroissante, il faut intervertir dans a) et b) les termes dessus et dessous.

Ces propriétés seront admises sans démonstration.

1) En vue d'appliquer la méthode des trapèzes pour le calcul de l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$, on partage le segment [a,b] en n parties égales.

Soit $h = \frac{b-a}{n}$. On considère les points d'abscisses $x_0 = a$, $x_1 = a + h$, $x_2 = a + 2h$, ..., $x_{n-1} = a + (n-1)h$, $x_n = b$ de la courbe représentative de la fonction f en axes orthonormés et on les appelle $M_0 = A$, M_1, ..., M_{n-1}, $M_n = B$.

L'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ évalue l'aire de la portion de plan comprise entre l'axe Ox, l'arc de courbe AB et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$. La formule des trapèzes évalue l'aire de la portion de plan comprise entre l'axe Ox, la ligne polygonale $AM_1M_2 \ldots M_{n-1}B$ et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.



En considérant comme sur le dessin, où P_k et Q_k sont les points d'intersection des tangentes à la courbe en M_k et M_{k+1} avec la droite d'équation $x = x_k + \frac{h}{2}$, la ligne polygonale formée par les segments successifs du type $M_kP_kQ_kM_{k+1}$, justifier que l'erreur de méthode (valeur de l'intégrale moins valeur donnée par les trapèzes) est en valeur absolue inférieure à :

$$\frac{(b-a)^2}{8n^2} \mid f'(b) - f'(a) \mid$$

Mettre en évidence géométriquement cette majorante de l'erreur de méthode (qui est la somme des aires des polygones du type $M_kP_kQ_kM_{k+1}M_k$) en menant par l'origine des axes des parallèles aux divers segments M_kP_k, M_kM_{k+1}, Q_kM_{k+1}, k parcourant l'ensemble (0, 1, 2, ..., n-1), jusqu'à la droite d'équation $x = \frac{h}{2}$.

Tournez la page S. V. P.

2) En supposant que, dans le dessin ci-dessus, le point M_k reste fixe et que h tende vers zéro, donc que M_{k+1} tende vers M_k, trouver la limite du rapport de l'aire comprise entre l'arc M_kM_{k+1} et la corde M_kM_{k+1} à l'aire intérieure au polygone $M_kP_kQ_kM_{k+1}M_k$.
On supposera pour cela que f est de classe C^2 et admet au point x_k une dérivée seconde non nulle.
Quelle est la limite si $f''(x_k) = 0$ mais f est de classe C^3 et $f''(x_k) \neq 0$.?

II

Dans un jardin, un massif a la forme d'une ellipse dont les deux demi-axes ont pour longueurs 2 mètres et 1 mètre. On veut l'entourer d'une petite bordure métallique et on voudrait connaître la longueur de bordure nécessaire.

1) Montrer que cette longueur est donnée, en mètres, par la formule

$$L = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + 3\sin^2 t}\ dt$$

2) Soit $f(t) = \sqrt{1 + 3\sin^2 t}$. Construire, en axes orthonormés, sa courbe représentative sur le segment $[0, \frac{\pi}{2}]$. Déterminer la concavité et le point d'inflexion avec sa tangente.

Montrer que $|f''(t)|$ est majoré par 3 sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

On pourra, dans les explications ultérieures, utiliser le fait qu'on peut admettre sans erreur sensible que l'abscisse du point d'inflexion est $\frac{\pi}{5}$.

3) Calculer la longueur L de l'ellipse en utilisant la méthode des trapèzes. On utilisera 10 trapèzes en partageant le segment $[0, \frac{\pi}{2}]$ en 10 parties égales.

a) Donner explicitement les 11 valeurs utiles de la fonction f, puis la valeur de L.

b) Evaluer une majorante de la valeur absolue de l'erreur de méthode en utilisant la formule classique de la méthode des trapèzes qui est, pour le segment [a,b] et n trapèzes :

$$\frac{(b-a)^3}{12n^2}\ \overline{|f''(t)|}$$

où $\overline{|f''(t)|}$ signifie majorant du module de la dérivée seconde sur [a,b], formule qu'il est inutile de redémontrer.

c) En utilisant les résultats de la partie I, paragraphes 1) et 2), expliquer pourquoi, en fait, la précision est infiniment meilleure que ce qu'indique cette formule classique.

4) On veut déterminer sur l'ellipse précédente le point qui se trouve au milieu de l'arc de l'ellipse correspondant aux valeurs de t parcourant $[0, \frac{\pi}{2}]$ (arc du premier quadrant).

En utilisant uniquement les valeurs de f(t) déjà calculées, donner un encadrement du paramètre t_0 de ce point de la forme $[\frac{k\pi}{20}, \frac{(k+1)\pi}{20}]$ encadrement qu'il faudra soigneusement justifier.

NOTA : sauf à partir de la question 3)c), la partie II est totalement indépendante de la partie I.